

BAB VI

PEWARNAAN GRAF

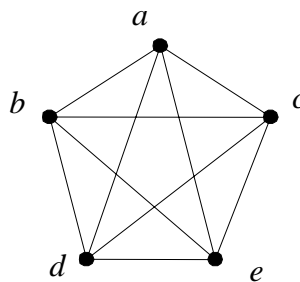
6.1 Pewarnaan Simpul

Pewarnaan dari suatu graf G merupakan suatu pemetaan dari sekumpulan warna ke beberapa simpul (*vertex*) yang ada pada graf G sedemikian sehingga simpul yang bertetangga memiliki warna yang berbeda.

Suatu graf G dikatakan berwarna n jika terdapat n warna dalam pewarnaan graf G tersebut. Jumlah warna minimum yang diperlukan dalam pewarnaan suatu graf dinamakan bilangan kromatik, yang dinotasikan oleh $\chi(G)$ (χ : dibaca chi).

Contoh :

Bilangan kromatik suatu graf lengkap- n (K_n) adalah n . Hal ini disebabkan karena setiap simpul pada graf lengkap adalah bertetangga. Jadi $\chi(K_n) = n$. Perhatikan graf lengkap dengan 5 simpul berikut ini :



maka untuk mewarnai graf tersebut diperlukan 5 warna.

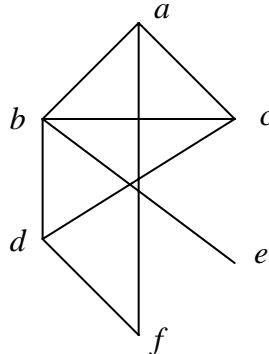
Algoritma Welch-Powell dalam pewarnaan suatu graf G dapat diilustrasikan sebagai berikut :

- Urutkan semua simpul pada graf G berdasarkan derajat masing-masing simpul, dari besar menjadi kecil. Urutan tersebut tidak unik karena beberapa simpul mungkin mempunyai derajat yang sama.
- Gunakan warna pertama untuk mewarnai simpul pertama dan simpul lain yang berada pada urutan sepanjang simpul tersebut tidak bertetangga dengan simpul sebelumnya.
- Berikan warna kedua untuk mewarnai simpul pada urutan tertinggi (yang belum diwarnai), lakukan seperti point sebelumnya.
- Seperti point ketiga, dilakukan terus menerus sehingga setiap simpul pada graf tersebut menjadi berwarna semua.

Algoritma Welch-Powell hanya memberikan batas atas untuk bilangan kromatik. Dengan demikian, algoritma ini tidak selalu memberikan jumlah warna minimum yang diperlukan dalam pewarnaan graf.

Contoh :

Gunakan algoritma Welch-Powell untuk pewarnaan graf berikut ini :



Terlihat bahwa urutan derajat masing-masing simpul adalah sebagai berikut :

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>
4	3	3	3	2	1

Dengan demikian, dapat dilakukan pewarnaan sebagai berikut :

Warna I untuk simpul : *b, f*

Warna II untuk simpul : *a, d, e*

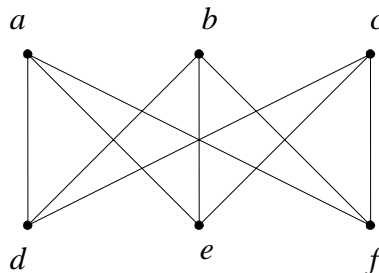
Warna III untuk simpul : *c*

Misalkan *G* merupakan suatu graf, pernyataan berikut adalah ekuivalen:

- G* merupakan graf bipartite
- Bilangan kromatik *G* adalah dua ($\chi(G) = 2$)
- Setiap sirkuit dari *G* mempunyai panjang yang genap

Contoh :

Perhatikan graf bipartit $K_{3,3}$:



Pewarnaan pada graf tersebut dapat dilakuakn dengan menggunakan dua warna, yaitu :

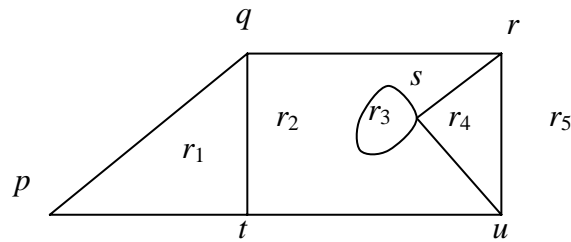
- Warna I untuk simpul *a, b, c*
- Warna II untuk simpul *d, e, f*

Sementara itu, jika kita ingin membuat suatu sirkuit pada graf tersebut, maka sirkuit tersebut akan melewati 3 atau 5 simpul yang lain sebelum kembali ke simpul awal. Sehingga sirkuit tersebut memiliki panjang yang genap

6.2 Pewarnaan Graf Planar

Definisi Daerah pada suatu Graf Planar

Sebelum membahas tentang pewarnaan daerah pada suatu graf planar, perhatikan beberapa definisi yang akan disampaikan terkait dengan graf planar berikut ini:



Area r_1 , r_2 , r_3 , r_4 , dan r_5 dinamakan daerah (region) dari graf planar tersebut. Dua buah daerah dalam suatu graf planar dikatakan bertetangga jika mereka paling sedikit mempunyai sebuah sisi bersama.

Contoh daerah yang bertetangga adalah :

- r_1 dan r_2
- r_2 dan r_3
- r_2 dan r_5
- r_4 dan r_5
- r_1 dan r_5
- r_2 dan r_4

Sementara itu, contoh daerah yang tidak bertetangga adalah :

- r_1 dan r_4
- r_5 dan r_3
- r_3 dan r_4

Jumlah daerah yang bertetangga dengan suatu daerah pada suatu graf diperoleh dengan cara menghitung jumlah daerah yang paling sedikit mempunyai satu sisi bersama dengan daerah tersebut.

Dengan demikian, masing-masing daerah pada graf tersebut mempunyai daerah tetangga sebagai berikut :

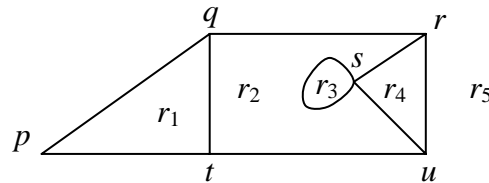
- r_1 mempunyai 2 daerah tetangga yaitu r_2 dan r_5
- r_2 mempunyai 3 daerah tetangga yaitu r_1 , r_3 dan r_5
- r_3 mempunyai 1 daerah tetangga yaitu r_2
- r_4 mempunyai 2 daerah tetangga yaitu r_2 dan r_5
- r_5 mempunyai 3 daerah tetangga yaitu r_1 , r_2 dan r_4

Pewarnaan Peta

Pewarnaan daerah (peta) pada suatu graf planar G merupakan pemetaan sekumpulan warna ke beberapa daerah yang berada pada graf planar tersebut sedemikian sehingga daerah yang bertetangga tidak memiliki warna yang sama.

Contoh :

Perhatikan graf planar berikut ini :



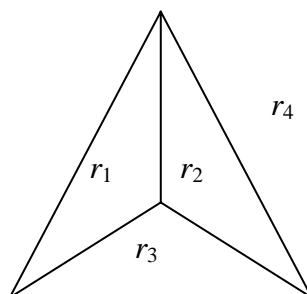
Lakukan pewarnaan daerah dengan menggunakan :

- 3 warna
- 2 warna

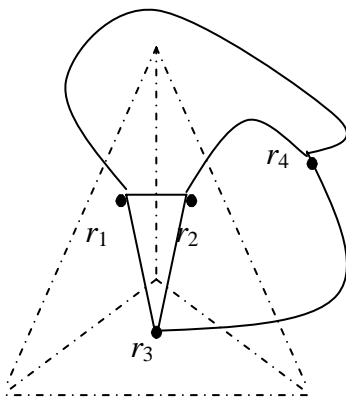
Jawab :

- Pewarnaan graf dengan 3 warna :
Warna I untuk daerah r_1 dan r_4
Warna II untuk daerah r_2
Warna III untuk daerah r_3 dan r_5
- Pewarnaan graf dengan 2 warna, tidak mungkin dapat dilakukan. Hal ini disebabkan karena daerah r_2, r_4 dan r_5 bertetangga satu sama lain, sehingga harus diberikan warna yang berbeda.

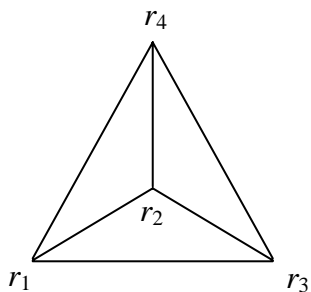
Dual dari pewarnaan peta adalah berupa pewarnaan simpul dari suatu graf planar. Perhatikan bahwa suatu pewarnaan pada graf G akan menghubungkan ke suatu pewarnaan simpul dari dual G^* . Dengan kata lain, sebuah peta G adalah berwarna n jika dan hanya jika graf planar dari dual G^* dengan warna n . Agar lebih jelas, perhatikan contoh graf berikut :



Pilih sebuah simpul dalam setiap daerah pada graf tersebut, hubungkan dua simpul tersebut dengan suatu sisi jika dua daerah tersebut saling bertetangga.

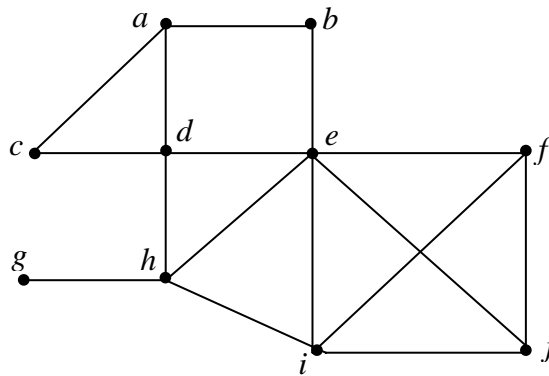


Jika kita gambarkan graf yang terbentuk maka diperoleh graf sebagai berikut :



Latihan :

1. Gunakan algoritma Welch-Powell untuk mewarnai graf dibawah ini :



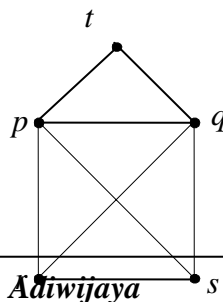
2. Pada suatu semester, akan disusun suatu jadwal UAS untuk matakuliah Kalkulus, Matematika Diskrit, Fisika, Bahasa Inggris, Bahasa Indonesia, Agama, Pancasila dan Kimia. Diketahui tidak ada mahasiswa yang mengambil pasangan matakuliah berikut ini **secara bersamaan** (dalam semester yang sama):

- Kalkulus & Kimia
- Matematika Diskrit & Kimia
- Bahasa Inggris & Bahasa Indonesia
- Bahasa Inggris & Agama
- Kalkulus & Matematika Diskrit
- Kalkulus & Fisika
- Fisika & Bahasa Inggris

Tetapi ada mahasiswa yang mengambil secara bersamaan untuk kombinasi matakuliah lainnya, dalam semester tersebut.

Berapa jumlah slot waktu **minimum** yang diperlukan untuk menyusun jadwal ujian UAS tersebut, sehingga tidak ada mahasiswa yang bentrok jadwal ujiannya

3. Berapa jumlah warna minimal untuk perwarnaan daerah (peta) pada graf dibawah ini !



DAFTAR PUSTAKA

- [1] Bondy, J. A., Murty, U. S. R., *Graph Theory with Applications*, The MacMillan Press Ltd, Hongkong, 1976
- [2] Kolman, B., Busby, R. C., *Discrete mathematical Structures for Computer Science*, 2nd edition, Prentice Hall, New Delhi, 1992
- [3] Munir, R., *Matematika Diskrit*, Edisi kedua, Informatika, Bandung, 2003
- [4] Rosen, K. H., *Discrete Mathematics and Its Applications*, 5th edition, McGraw-Hill, Singapore, 2003
- [5] Slamet, S., Makaliwe, H., *Matematika Kombinatorik*, Elek Media Komputindo, Jakarta, 1991